



СЪЗДАВАНЕ НА ЦИФРОВ МОДЕЛ НА ПОВЪРХНИНАТА НА КВАЗИГЕОИДА ЗА ЛОКАЛНИ ТЕРИТОРИИ

Кремена Щерева¹, Славейко Господинов²

¹ Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", гр. София, България, k_shtereva@mail.bg

² Университет по архитектура, строителство и геодезия, гр. София, България,
sgospodinov@mail.bg

CREATION OF A DIGITAL MODEL OF THE SURFACE OF THE QUASIGEOID FOR LOCAL TERRITORIES

Kremena Stereva¹, Slaveyko Gospodinov²

¹ University of Mining and Geology is "St. Ivan Rilski", Sofia, Bulgaria, k_shtereva@mail.bg

² University of architecture, civil engineering and geodesy, Sofia, Bulgaria, sgospodinov@mail.bg

ABSTRACT

The significance of the quasigeoid, as a reference surface in the system "normal heights" is emphasized. The accent is raised on the GPS-levelling, as a ground geometrical method for creation of a mathematical model of the quasigeoid. The main steps, determined the application of geodetic methods for collection of empiric information about the surface of the quasigeoid are in details presented. The surface is concerned to a concrete, limited as a territory region. An estimation of the accuracy of the quasigeoid's model, from a point of view about it's application in the geodetic practice is done.

Keywords: Quasigeoid, normal heights, geodetic height, height's anomaly, GPS-levelling

1. Въведение

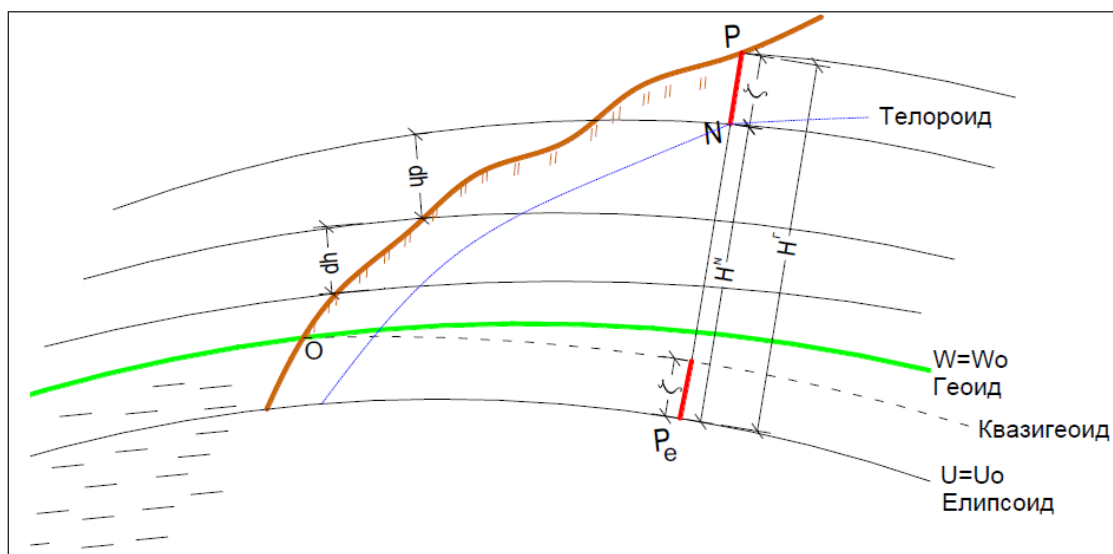
Въпросът за избор на единна, глобална система, чрез която да бъде еднозначно дефинирано пространственото положение на реални обекти, е вълнувал умовете на определена част от човечеството в продължение на стотици години. Особено място в тази проблематика е заемал и заема изборът на единно референтно начало, обуславящо възможността за фиксиране на позицията (височината) на отделен обект спрямо земната повърхност. Очевидно, подобен проблем има своето асоциативно начало, но научните търсения, насочени към неговото глобално решаване, продължават до ден днешен. В професионалните среди този проблем е известен като „проблем на третата координата“. В исторически план, изборът на референтна повърхнина за височинната локация на даден обект е претърпял множество интерпретации. В днешно време, доминиращо значение при отчитане на височинната позиция на обектите има повърхнината на квазигеоида [5]. Независимо от ясната и категорична дефиниция на понятието квазигеоид [6], практическото извеждане на модел на квазигеоида е една от основните съвременни задачи на физическата геодезия.

Значимостта, за геодезическата практика, на един точен, в рамките на сантиметровия диапазон, модел на квазигеоида е безспорна. С развитието на Глобалните навигационни спътникови системи (ГНСС) се създадоха реални предпоставки за директно получаване на геодезическите (наделипсоидните) височини за точки от земната повърхност. При това положение, в случай, че за същите тези точки е известно отстоянието между референтния елипсоид и квазигеоида (аномалията на височината ζ), би могло да се реализира т.нар. „ГНСС-нивелация“, т.е. да се определят нормалните височини H^N на точките (фиг. 1), съгласно очевидната зависимост:

$$H_i^N = H_i^\Gamma - \zeta, \quad (1)$$



където: H_i^Γ е определената посредством ГНСС-измервания наделипсоидна (геодезическа) височина на произволна точка i .



Фиг. 1

Следователно, за да можем достатъчно точно да определим повърхнината на квазигеоида, трябва да разполагаме с детайлна и максимално точно информация за стойностите на нормалната и геодезическата височина в не малък брой точки от земната повърхност.

2. Теоретична обосновка на метода

Извеждането на прецизна повърхнина на квазигеоида, в общия случай, не е чисто геометричен проблем. Докато геодезическите височини H^Γ се получават директно, в резултат на ГНСС-наблюдения (измервания), то за окончателните стойности на нормалните височини H^N не е така [1]. Тези стойности се получават след една предварителна обработка на резултатите от нивелачните измервания, при която обработка участват основните характеристики на реалното и нормалното гравитационно поле [6]. Освен това, един от тези параметри – средноинтегралната стойност на нормалната сила на тежестта е в тясна зависимост от въведения, за съответната територия, референтен елипсоид.

За малки и сравнително равнинни територии, с предполагаема хомогенна дислокация на земните маси в дълбочина, би могло да се приложи геометричния подход, т.е. да се определят стойностите на аномалията на височината ζ , съгласно (1), в точки с предварително зададена гъстота. В този случай, точността на модела на квазигеоида, би могла да се оцени по два начина:

- **Предварително**, имайки предвид, че $\zeta = f(H^\Gamma, H^N)$. Тогава:

$$m_\zeta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial H^\Gamma}\right)^2 \cdot m_{H^\Gamma}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial H^N}\right)^2 \cdot m_{H^N}^2}, \quad (2)$$

Където: m_{H^Γ} и m_{H^N} са средните квадратни грешки, с които са били определени, съответно геодезическите и нормалните височини на точките.

- **След създаване на модела**: от моделната повърхнина се отчитат аномалиите на височините за точки, в които предварително са определени H^Γ и H^N , но тези точки не са участвали при оформянето на повърхнината.

За територията на България съществува и още един, предполагаем, проблем. Предположението е продиктувано от факта, че до скоро (2010 година) за референтен елипсоид е използван елипсоидът на Красовски. Следователно, ако се позовем на основната зависимост, която се използва при дефиницията на понятието „нормална височина“: за една точка P [5]:



$$(W_O - W_P) = (U_O - U_N), \quad (3)$$

където:

W_O е реалния потенциал на повърхнината на геоида;

W_P е реалния потенциал на повърхнината в точка P;

U_O е нормалният потенциал на повърхнината на референтния елипсоид;

U_N е нормалният потенциал в т. N от нормалата към елипсоида, през т. P, която точка се избира така, че да гарантира изпълнението на (3).

Като се има предвид, че геодезическите височини, определени посредством ГНСС-измервания, са спрямо елипсоида WGS'84, логично е да се предположи, че аномалиите на височините, изчисление от (1), ще бъдат различни заради относимостта на нормалните височини спрямо различни елипсоиди. За да се изразят аномалиите на височините на точките спрямо двата различни елипсоида – на Красовски и този на системата WGS'84, би могло да се напише:

$$\zeta_{i_{кр.}} = H_{i_{84}}^{\Gamma} - H_{i_{кр.}}^N \quad (4)$$

$$\zeta_{i_{84}} = H_{i_{84}}^{\Gamma} - H_{i_{84}}^N \quad (5)$$

Където: $\zeta_{i_{кр.}}$ и $\zeta_{i_{84}}$ са съответно аномалиите на височините, когато нормалните височини са дефинирани спрямо елипсоида на Красовски и спрямо елипсоида WGS'84;

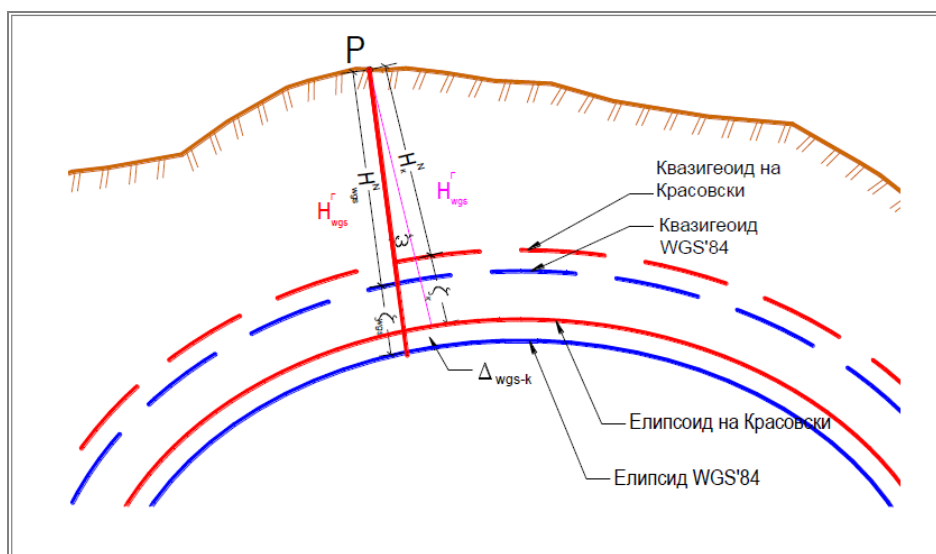
H_i^{Γ} – геодезическата височина на точка i, определена посредством ГНСС-наблюдения, спрямо елипсоида WGS'84;

$H_{i_{кр.}}^N$ и $H_{i_{84}}^N$ – нормалните височини на т. i, дефинирани и изчислени спрямо елипсоида на Красовски и елипсоида WGS'84.

В такъв случай за разликата в стойностите на аномалията на височината, за една и съща точка, породена от съотносимостта на нормалните височини към двата различни елипсоида, може да се напише:

$$\Delta\zeta_i = \zeta_{i_{84}} - \zeta_{i_{кр.}} = H_{i_{84}}^{\Gamma} - H_{i_{кр.}}^N \quad (6)$$

От където се налага изводът, че тази разлика зависи основно от отместването между двата елипсоида. Логично е да се предположи, че за малки територии повърхнините на двата елипсоида, макар и отместени, ще са успоредни помежду си (фиг. 2).



Фиг. 2



3. Създаване на геометричен модел на квазигеоида – практически аспекти

За практическата реализация на прилагания метод е избрана част от територията на гр. София, с приблизителна площ от 2300 ha. Изходните данни са базирани на статични ГНСС-измервания (минимален период на наблюдение – 15 минути и запис на всеки 5 секунди) на 315 точки и на високоточни нивелачни измервания между същите точки. Изчисленията, впоследствие нормални височини са в Балтийска височинна система. Използвани са и 10 точки, равномерно разположени на територията на обекта, с известни геодезически височини спрямо двата елипсоида, като за всяка точка е изчислена разликата.

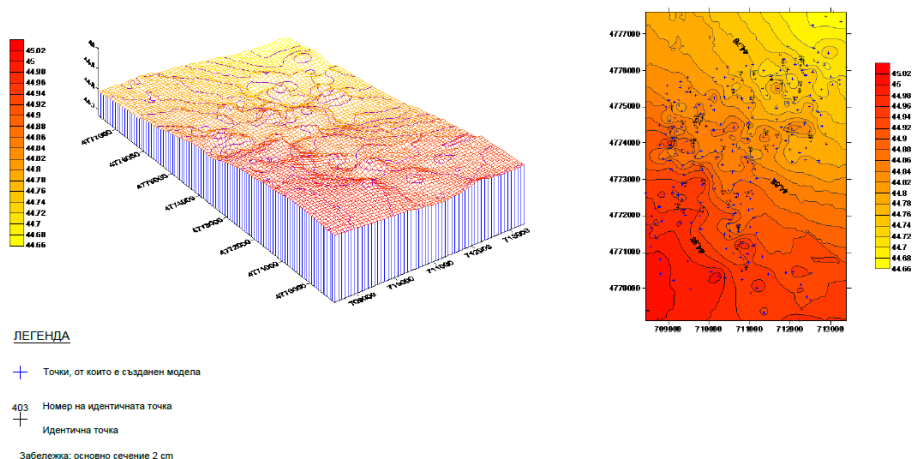
$$\Delta_{WGS-Kp.} = H_{84}^{\Gamma} - H_{Kp.}^N \quad (7)$$

Резултатите от изчисленията са дадени в таблица 1. Може да се види, че изчислените разлики са от порядъка на 1 см, което е доказателство, че повърхнините на двата елипсоида са не само успоредни, но са и незначително отместени помежду си. Този факт е предпоставка и същевременно обосновка, аномалиите на височините да се изчисляват, съобразно зависимостта (4).

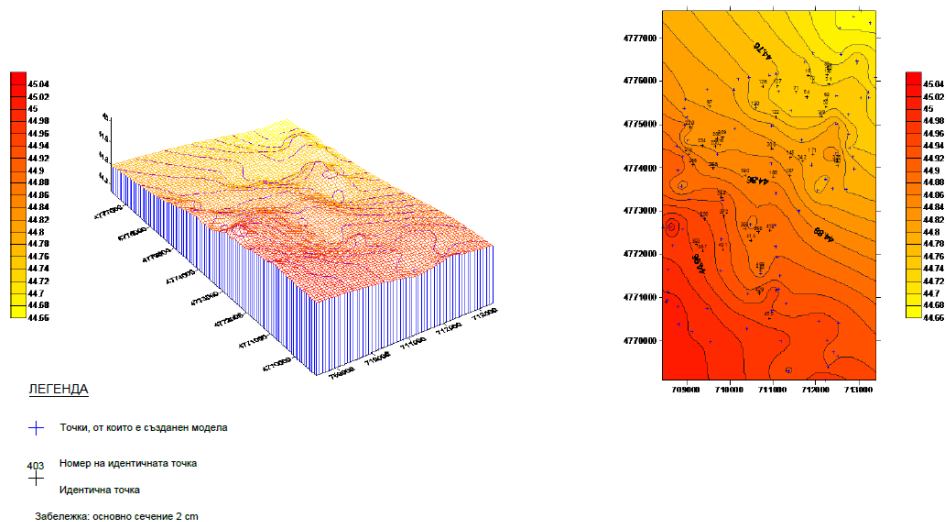
Таблица 1

WGS'84							Красовски									
№	B			L			H [m]	№	B			L			H [m]	Δ_{WGS-K} [m]
	o	'	''	o	'	''			o	'	''	o	'	''		
20	42	40	0.482	23	22	3.735	604.420	20	42	40	1.799	23	22	9.135	604.409	0.011
41	42	39	40.255	23	22	2.323	610.960	41	42	39	41.573	23	22	7.722	610.949	0.011
166	42	39	25.982	23	21	59.334	625.366	166	42	39	27.300	23	22	4.733	625.355	0.011
338	42	38	51.564	23	21	48.380	630.041	338	42	38	52.882	23	21	53.779	630.030	0.011
348	42	38	41.654	23	21	20.904	645.438	348	42	38	42.973	23	21	26.303	645.427	0.011
370	42	38	38.951	23	20	43.040	659.962	370	42	38	40.270	23	20	48.438	659.950	0.012
446	42	38	2.383	23	21	15.048	669.413	446	42	38	3.702	23	21	20.445	669.402	0.011
469	42	37	30.882	23	21	29.876	696.118	469	42	37	32.201	23	21	35.273	696.107	0.011
478	42	37	57.557	23	20	6.234	709.216	478	42	37	58.877	23	20	11.632	709.204	0.012
379	42	38	38.489	23	20	1.660	668.764	379	42	38	39.808	23	20	7.058	668.752	0.012
102	42	39	11.554	23	20	9.887	641.260	102	42	39	12.873	23	20	15.286	641.248	0.012
4	42	39	29.453	23	20	34.048	631.760	4	42	39	30.772	23	20	39.447	631.748	0.012
9	42	39	45.269	23	21	18.520	623.115	9	42	39	46.587	23	21	23.919	623.104	0.011
147	42	39	15.206	23	21	22.733	635.853	147	42	39	16.524	23	21	28.132	635.842	0.011

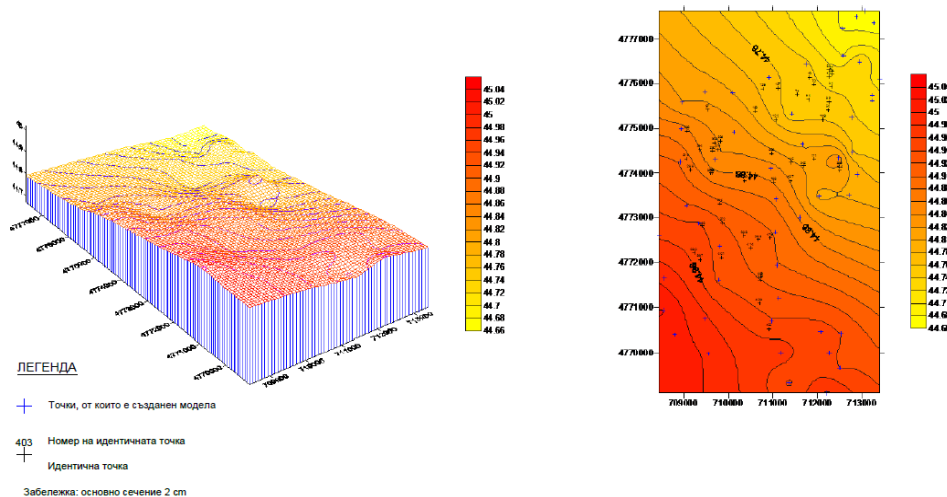
Формирани са няколко модела на повърхнината на квазигеоида – на базата на изчислени аномалии на височините в 265 точки, 90 точки, 50 точки и 25 точки. Получените, в резултат на интерполация, повърхнини са показани графично, съответно на фиг. 3, фиг. 4, фиг. 5 и фиг. 6.



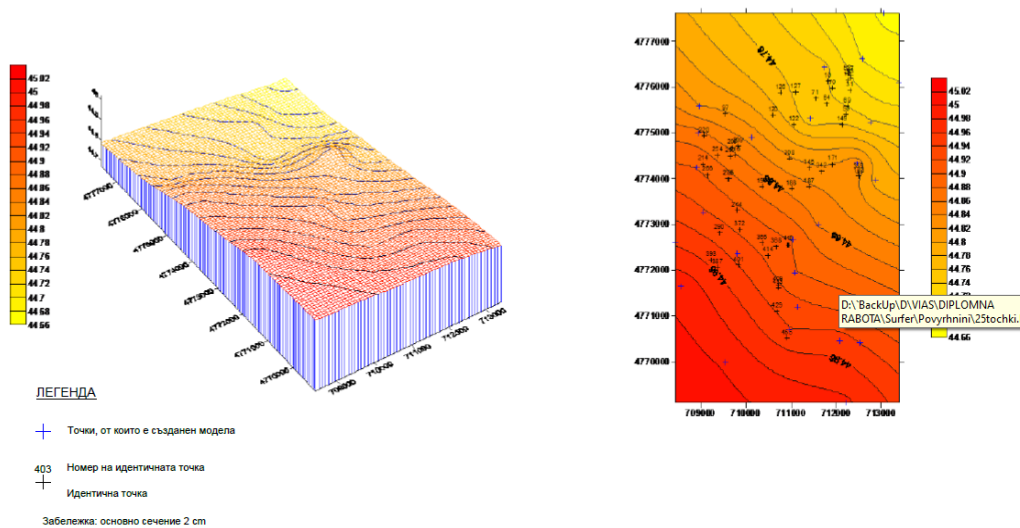
Фиг. 3 Повърхнина на квазигеоида, определена с 265 точки



Фиг. 4 Повърхнина на квазигеоида, определена с 90 точки



Фиг. 5 Повърхнина на квазигеоида, определена с 50 точки



Фиг. 6 Повърхнина на квазигеоида, определена с 25 точки



Оценката на точността и приложимостта на отделните модели е направено на базата на изчислени разлики между получени, в резултат на нивелация нормални височини на точки (не участваща при интерполационното формиране на повърхнината на квазигеоида) и отчетените от модела, за същите точки, височини. В случая, получените от нивелацията стойности на височините са приети за най-вероятни, при което допустимата стойност на констатираната грешка на модела е определена съобразно зависимостта:

$$m_{\text{доп.}} = 3m_{\text{quasigeoid}} \quad (8)$$

Където:

$$m_{\text{quasigeoid}} = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \quad (9)$$

$$\Delta = H_{\text{нив.}}^N - H_{\text{отч.}}^N \quad (10)$$

$H_{\text{нив.}}^N$ и $H_{\text{отч.}}^N$ са съответно нормалните височини, определени в резултат на нивелачните измервания и тези, отчетени от модела. Резултатите от оценката са дадени в таблица 2.

Таблица 2

Брой на точките, формирали модела	$m_{\text{quasigeoid}}$	$m_{\text{доп.}}$
265	1,66	4,95
90	1,92	5,76
50	1,93	5,78
25	1,93	5,78

Вижда се, че средата квадратна грешка на модела, при създаването на който са използвани 90, 50 и 25 точки, остава практически постоянна. Същото може да се каже и за стойностите на допустимата грешка. Подобна констатация дава основание да се счита, че моделът, формиран на базата на 25, равномерно разположени на територията, точки е пълноценен и практически използваем, т.е. необходимата гъстота на точките, в случая, е 0,01 точка/ha.

4. Заключение

Анализът на резултатите от практическото приложение на предложения метод при определения на модел на квазигеоида за ограничени по площ територии, провокира формулирането на някои изводи. Основният от тези изводи е, че определянето на нормалните височини, посредством ГНСС измервания, в много случаи може да замени техническата геометрична нивелация.

За конкретния обект, допустимото несъвпадение може да се определи от зависимостта:

$$f_{\text{доп.}} = 30 \sqrt{S_{\text{cp}[km]}} = 3 \cdot \sqrt{5.29_{km}} = 69.05mm$$

Тази стойност, сравнена със средната квадратна грешка, която гарантира модела, води до:

$$m_{\text{quasigeoid}} = 1.93cm < f_{\text{доп.}} = 6,90cm$$

Направените конкретни изчисления недвусмислено доказват приложимостта на ГНСС-технологиите за определяне на нормални височини на точки, при предварително формиран коректен модел на квазигеоида. Ефективността на ГНСС-нивелацията, от гледна точка на бързината и икономическата ефективност, е безспорна.



Литература

1. Господинов, С., Пенева, Е., Пенев, П., Ламбева, Т., Цановски, Ю., Джорова, С., Маринов, Г., Радев, И. (2016). Съвременни аспекти на геометричната нивелация. Годишник на УАСГ, София, XLIV, св. V.
2. Господинов, С., Пенева, Е., Ламбева, Т., (2017) Реализация приливных стандартов в европейских и глобальных системах эталонных высотыл Славянский форум – материалы Международной конференции по интеграции, аналитике и геоинформационному сервису, Мсква, 15-19 ноября, 2017.
3. Пенева, Е., Паталов, С. (2021) Извеждане на локален модел на квазигеоида за територията на град София, България
4. Пенева, Е., Господинов, С., Постоловски, А., (2018). Изследване на европейски модел на геоида EGG2015 за ограничен район от територията на Р Македония. Годишник на УАСГ, брой 51, том 4, 2018
5. Пенева, Е., (2017). Височини и височинни системи.
6. Стойнов, В., Пенева, Е., (2002). Физическа геодезия. УАСГ, София, 2002.
7. Hofmann-Welenhof, B., Moritz, H., (2005). Physical geodesy, "Springer Wien", New York
8. Lambeva, T., Peneva, E., Gospodinov, S. (2019). Normal height and geopotencial number differences determination for the territory of Bulgaria with use of data from global gravity field models. 19-th International Multidisciplinary Scientific Conference SGEM 2019.